به نام خدا

تولید مقادیر تصادفی

یادآوری مطالب فصل هفتم

- اعداد تصادفی و ویژگی آنها
- نحوه تولید اعداد تصادفی
  - مولد همنهشتی خطی، **LCM**
  - مولد همنهشتی خطی ترکیبی
- آزمون هایی جهت بررسی یکنواختی اعداد تولید شده
  - آزمون مربع کای
  - آزمون کالموگروف- اسمیرنف
- آزمون هایی جهت بررسی استقلال اعداد تولید شده
  - تعداد روندهای صعودی و نزولی
  - تعداد روندهای بزرگتر و کوچکتر از میانگین
  - آزمون همبستگی **Autocorrelation**

A.Ghaderi
University of Kurdistan

Basics of Simulation

خلاصه ای بر مطالب فصل هشتم

- مقادیر تصادفی
- نحوه تولید مقادیر تصادفی
  - تبدیل معکوس
    - توزیع های پیوسته – CDF شکل ساده: نمایی، یکنواخت، و ...
    - توزیع های پیوسته – CDF شکل پیچیده: نرمال، بتا، گاما و ...
      - شیوه جدول گرد- تقریب CDF
    - توزیع پیوسته تجربی (مجموعه کوچک و بزرگ)
    - توزیع گسسته تجربی
  - روش پیچش
  - روش رد و قبول

A.Ghaderi
University of Kurdistan

تولید مقادیر تصادفی

- مقادیر تصادفی: از یک توزیع آماری مشخص پیروی می کنند. مثلاً توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2

- روش های تولید مقادیر تصادفی:
  ۱- تبدیل معکوس
  ۲- روش پیچش
  ۳- روش رد و قبول

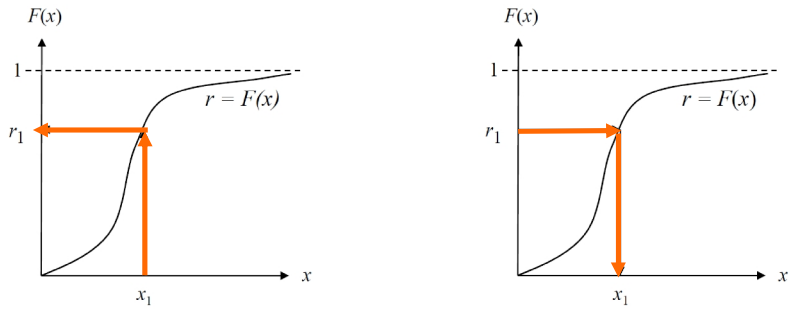
- برای تولید مقادیر تصادفی فرض می شود که یک منبع از اعداد تصادفی در دسترس می باشد.
  - استفاده از یکی از روش های بحث شده (جدول های موجود، مولد همنهشتی خطی LCM و ...)

4

Inverse-Transform Technique روش تبدیل معکوس

- The concept:
  - For cdf function: r = F(x)
  - Generate r from uniform (0,1)
  - Find x:

$$x = F^{-1}(r)$$



5

Inverse-Transform Technique روش تبدیل معکوس

- اصولاً این روش را می توان برای هر توزیعی استفاده نمود.
- زمانی می توان از روش تبدیل معکوس استفاده کرد که تابع توزیع تجمعی نسبتاً ساده باشد، بطوریکه به سادگی بتوان معکوس آنرا (F^{-1}) محاسبه نمود.
- این روش را می توان به منظور نمونه گیری از توزیع های نمایی، ویبول، یکنواخت، مثلثی و توزیع های تجربی مورد استفاده قرار داد.
- روش مذکور مستقیم ترین روش است ولی از لحاظ محاسباتی همواره کاراترین روش نیست.

6

مراحل روش تبدیل معکوس

۱- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X را بدست آورید. $F_X(x)$

۲- فرض کنید رابطه زیر در دامنه X برقرار است.

$$R = F(x)$$

- توجه: R یک عدد تصادفی است که در فصل ۷ در مورد آن بحث شد.
- سوال: چرا تابع توزیع تجمعی را با R می توان مساوی قرار داد؟

۳- معادله $R = F(x)$ را حل کنید تا مقدار X را برحسب R بدست آید.

۴- اعداد تصادفی یکنواخت را تولید و مقادیر مورد نظر را طبق رابطه زیر بدست آورید.

$$X_i = F^{-1}(R_i)$$

7

روش تبدیل معکوس: مثال

- نمونه گیری از توزیع نمایی با پارامتر λ

تابع چگالی احتمال توزیع نمایی

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی توزیع نمایی

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

λ متوسط تعداد رخدادها در واحد زمان و $\frac{1}{\lambda}$ میانگین زمان بین دو رخداد می باشد. (مثلاً آهنگ ورود مشتریان)

هدف ارائه شیوه ای برای تولید مقادیر $X_1, X_2, X_3, \ldots$ می باشد که توزیع نمایی داشته باشند.

8

روش تبدیل معکوس: مثال

$$1-e^{-\lambda X}=R \Rightarrow e^{-\lambda X}=1-R$$

$$\Rightarrow -\lambda X=\ln(1-R)$$

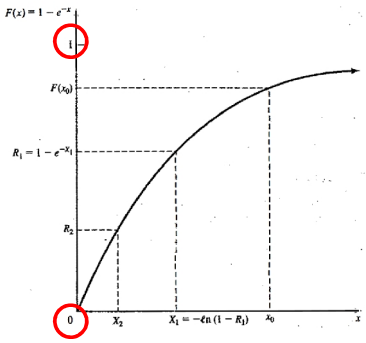
$$X=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R) \Rightarrow X_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R_i)$$

از آنجا که R و 1-R هر دو در فاصله (۱و۰) توزیع یکنواخت دارند، می توان از رابطه زیر نیز استفاده نمود.

$$X_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(R_i)$$

9

مثال: تولید مقادیر تصادفی نمایی با پارامتر ۱



نمای ترسیمی روش تبدیل معکوس

$$X_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R_i)$$

$$\lambda=1$$

$$X_i=-\ln(1-R_i)$$

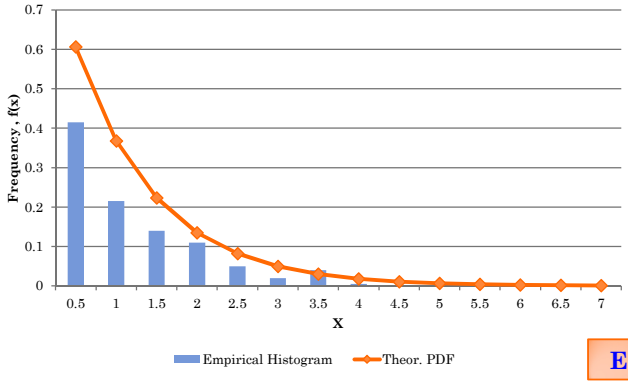
$$if\ \ R=0.9 \rightarrow X=-\ln(1-R)=$$
$$-\ln(0.1)=2.305$$

i	۱	۲	۳	۴	۵
R_i	۰.۱۳۰۶	۰.۰۴۲۲	۰.۶۵۹۷	۰.۷۹۶۵	۰.۷۶۹۶
X_i	۰.۱۴۰۰	۰.۰۴۳۱	۱.۰۷۸	۱.۵۹۲	۱.۴۶۸

10

مثال: تولید مقادیر تصادفی نمایی با پارامتر ۱

- با تهیه نمونه های بیشتر (۲۰۰ مقدار تصادفی تولید شده) و رسم هیستوگرام مقادیر بدست آمده، می توان تابع چگالی توزیع نمایی را با تابع چگالی بدست آمده از روش تبدیل معکوس مقایسه نمود.



Excel

11

نمونه گیری از توزیع یکنواخت

تابع چگالی یکنواخت

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی توزیع یکنواخت

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

12

نمونه گیری از توزیع یکنواخت

$$F(X)=\frac{(X-a)}{(b-a)}=R \qquad \Rightarrow X=a+(b-a)R$$

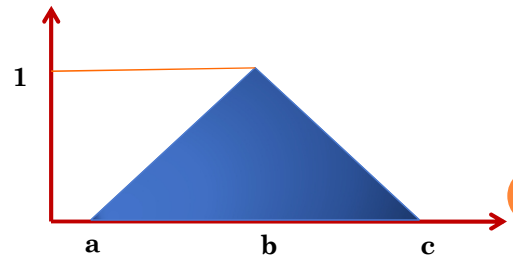
$$\Rightarrow X_i=a+(b-a)R_i$$

با تولید مقادیر مختلف برای R، از رابطه بالا مقادیر تصادفی یکنواخت بین a و b بدست خواهد آمد.

13

نمونه گیری از توزیع مثلثی

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a} & a<x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & b<x\le c\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



14

نمونه گیری از توزیع مثلثی

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$if \quad 0\le x\le 1 \Rightarrow \qquad F(x)=\int_0^x t\,dt=\left.\frac{t^2}{2}\right)_0^x=\frac{x^2}{2}$$

$$F(1)=\frac{1}{2}$$

15

نمونه گیری از توزیع مثلثی

$$if \quad 1<x\le 2 \Rightarrow \qquad F(x)=\frac{1}{2}+\int_1^x (2-t)\,dt=\tfrac{1}{2}+2t-\tfrac{1}{2}t^2\Big)_1^x$$

برای محاسبه تابع توزیع تجمعی بین ۱ و ۲، باید مقدار بین ۰ و ۱ به آن اضافه گردد.

$$\Rightarrow F(x)=1-\frac{(2-x)^2}{2}$$

16

نمونه گیری از توزیع مثلثی

$$if\ 0 \le x \le 1 \rightarrow \qquad \frac{X^2}{2} = R \rightarrow X = \pm\sqrt{2R}$$

چون X بین ۰ و ۱ است لذا، R بین ۰ و $\frac{1}{2}$ بوده و $X = \sqrt{2R}$

$$if\ 1 < x \le 2 \rightarrow \qquad 1 - \frac{(2-X)^2}{2} = R \rightarrow \frac{1}{2} \le R \le 1$$

$$X = 2 - \sqrt{2(1-R)}$$

17

نمونه گیری از توزیع مثلثی

$$X = \begin{cases} \sqrt{2R} & 0 \le R \le 1/2 \\ 2 - \sqrt{2(1-R)} & 1/2 \le R \le 1 \end{cases}$$

18

نمونه گیری از توزیع های تجربی گسسته

- کاربرد توزیع های تجربی: در صورت ناتوانی مدلساز در یافتن توزیع مناسب تئوری برای داده های ورودی مسئله
- جهت جمع آوری داده های تجربی:
  - نمونه گیری مجدد از داده های مشاهده شده
  - درون یابی مابین کران داده های مشاهده شده
- داده های در دسترس:
  - مجموعه کوچک
  - مجموعه بزرگ

19

نمونه گیری از توزیع های تجربی گسسته: مجموعه کوچک

- For a small sample set (size n):
  - Arrange the data from smallest to largest

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$$

  - Set $x_{(0)} = 0$
  - Assign the probability 1/n to each interval $x_{(i-1)} \le x \le x_{(i)}$, $i = 1,2,\ldots,n$
  - The slope of each line segment is defined as:

$$a_i = \frac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{i/n - (i-1)/n} = \frac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{1/n}$$

  - The inverse CDF is given by :

$$\boxed{X = \hat{F}^{-1}(R) = x_{(i-1)} + a_i\left(R - \frac{(i-1)}{n}\right)} \quad \text{when} \quad \frac{(i-1)}{n} \prec R \le \frac{i}{n}$$

20

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه کوچک -مثال

پنج مشاهده در مورد مدت پاسخ گروه آتش نشانان به درخواست کمک بر حسب دقیقه، گردآوری شده است تا در شبیه سازی مربوط به تحقیق درباره تامین نیروی انسانی و خط مشی های زمانبندی گروههای آتش نشان، مورد استفاده قرار گیرد. داده ها عبارت اند از:

2.76, 1.83, 0.80, 1.45, 1.24

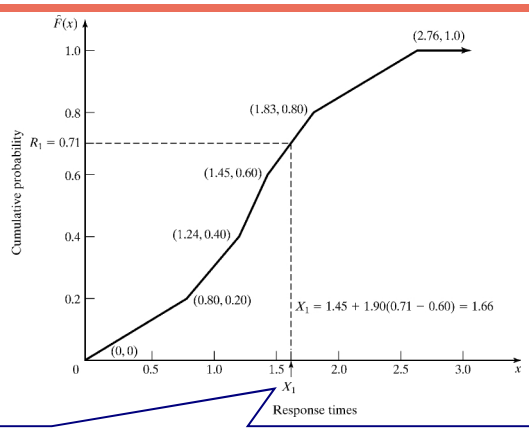
21

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه کوچک -مثال

فاصله (دقیقه)	احتمال، PDF	احتمال تجمعی، CDF	شیب a_i
$0.0 < x \le 0.80$	۰.۲	۰.۲	۴.۰۰
$0.80 < x \le 1.24$	۰.۲	۰.۴	۲.۲۰
$1.24 < x \le 1.45$	۰.۲	۰.۶	۱.۰۵
$1.45 < x \le 1.83$	۰.۲	۰.۸	۱.۹۰
$1.83 < x \le 2.76$	۰.۲	۱.۰	۴.۶۵

22

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه کوچک -مثال



$R_1 = 0.71 \qquad \hat{F}(x_3) = {(i-1)}/{5} = 0.6 \le R_1 = 0.71 \le \hat{F}(x_4) = {i}/{5} = 0.8$

$X_1 = x_3 + a_4(R_1 - \hat{F}(x_3)) = 1.45 + 1.9(0.71 - 0.6) = 1.65$

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه کوچک -مثال

- هر چه تعداد مشاهدات بیشتر گردد و بازه های تعیین شده افزایش یابد، دقت برآورد تابع توزیع تجمعی بالاتر می رود اما با افزایش تعداد بازه ها جستجو برای یافتن بازه مورد نظر، بیشتر می گردد.
- بهتر است مشاهدات بین ۲۰ تا ۵۰ فاصله گروهبندی گردد.
- در مثال قبل فرض کردیم که مقدار X بین صفر و ۲.۷۶ قرار می گیرد. اگر بدانیم مدت های پاسخ بین ۱۵ ثانیه و ۳ دقیقه قرار می گیرد، آنگاه:

$0.25 < x \le 0.80$
$0.80 < x \le 1.24$
$1.24 < x \le 1.45$
$1.45 < x \le 1.83$
$1.83 < x \le 2.76$
$2.76 < x \le 3.00$

به این ترتیب به هر فاصله احتمال $\frac{1}{6} = 0.167$ نسبت داده می شود.

نمونه گیری از توزیع های تجربی گسسته: مجموعه بزرگ

- What happens for large sample of data:
  - Several hundreds or tens of thousand
- For a large sample set :
  - Summarize into frequency distribution with small number of intervals.

    (equal intervals)

    $x_{(i-1)} < x \le x_{(i)}$: i^{th} interval

  - Fit a continuous empirical cdf to the frequency distribution.

    if $c_{i-1} < R \le c_i$ (c_i : cumulative frequency)

$$X = \hat{F}^{-1}(R) = x_{(i-1)} + a_i(R - c_{i-1})$$

Where

$$a_i = \frac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{c_i - c_{i-1}}$$

25

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه بزرگ- مثال

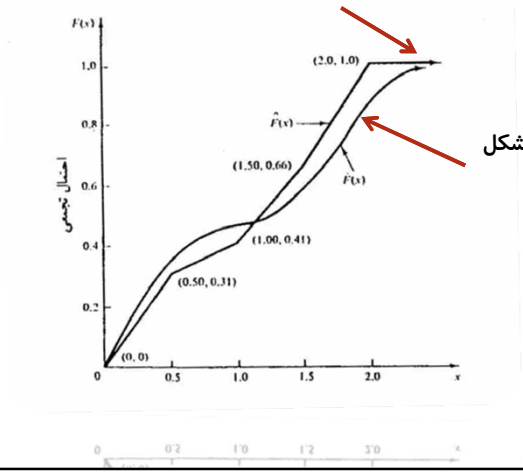
- فرض کنید ۱۰۰ مورد از مدت تعمیر نوعی ابزار که دچار خرابی شده در جدول زیر گردآوری شده است.

i	فاصله (ساعت)	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی، c_i	شیب، a_i
1	$0 \le x \le 0.5$	۳۱	۰.۳۱	۰.۳۱	۱.۶۱
2	$0.5 \le x \le 1.0$	۱۰	۰.۱۰	۰.۴۱	۵
3	$1.0 \le x \le 1.5$	۲۵	۰.۲۵	۰.۶۶	۴
4	$1.5 \le x \le 2.0$	۳۴	۰.۳۴	۱.۰۰	۱.۴۷

26

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه بزرگ- مثال

توزیع تجربی که از داده های جمع آوری شده بدست آمده است.

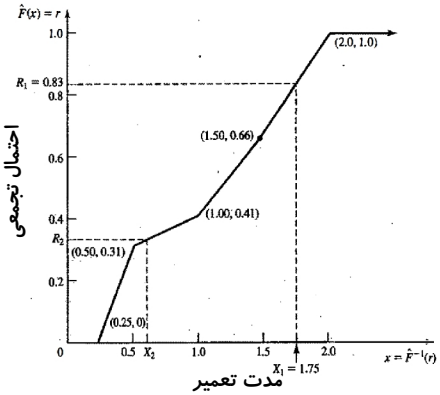


توزیع واقعی داده ها که شکل آن را نمی دانیم.

27

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه بزرگ- مثال

- از آنجا که زمان تعمیر حتماً بزرگتر از صفر است لذا شکل تابع تجمعی داده ها را بصورت زیر تغییر می دهیم. (فرض می کنیم که همه تعمیرها دست کم ۱۵ دقیقه طول می کشد.)



$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0$$

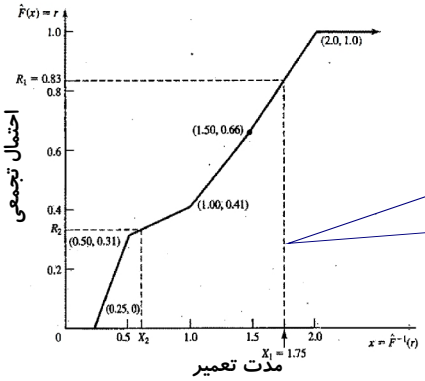
$$R = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0$$

$$X = x_0 + \frac{\Delta x}{\Delta y}(R - \hat{F}(x_0))$$

$$= x_{(i-1)} + a_i(R - c_{i-1})$$

28

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه بزرگ- مثال



Consider $R_1 = 0.83$:

$c_3 = 0.66 < R_1 < c_4 = 1.00$

$X_1 = x_{(4-1)} + a_4(R_1 - c_{(4-1)})$
$= 1.5 + 1.47(0.83-0.66)$
$= 1.75$

29

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه بزرگ- مثال

i	ورودی c_i	خروجی (x_i)	شیب (a_i)
۱	۰	۰.۲۵	۰.۸۱
۲	۰.۳۱	۰.۵	۵.۰
۳	۰.۴۱	۱.۰	۲.۰
۴	۰.۶۶	۱.۵	۱.۴۷
۵	۱.۰۰	۲.۰	–

توجه: از آنجا که از تابع معکوس $\hat{F}(x)$ استفاده می کنیم، لذا جای ورودی و خروجی ها عوض شده است.

30

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه بزرگ- مثال

دستورالعمل استفاده از جدول قبل جهت تولید مقادیر تصادفی:

۱- R راتولید کنید.

۲- فاصله i را که R در آن قرار دارد بیابید. بعبارت دیگر:

$$\hat{F}(x_i) = c_i \le R \le \hat{F}(x_{i+1}) = c_{i+1}$$

۳-X را از رابطه زیر تولید کنید.

$$X = x_i + a_i(R - c_i)$$

31

نمونه گیری از توزیع های تجربی: مجموعه بزرگ- مثال

i	ورودی $\hat{F}(x_i)$	خروجی x_i	شیب (a_i) $\Delta x / \Delta y$
۱	۰	۰.۲۵	۰.۸۱
۲	۰.۳۱	۰.۵	۵.۰
۳	۰.۴۱	۱.۰	۲.۰
۴	۰.۶۶	۱.۵	۱.۴۷
۵	۱.۰۰	۲.۰	-

$$R = 0.33 \quad \rightarrow \hat{F}(x_2) = 0.31 \le R = 0.33 \le \hat{F}(x_3) = 0.41$$

$$\Rightarrow X_2 = x_2 + a_2(R - \hat{F}(x_2)) = 0.5 + 5(0.33 - 0.31) = 0.6$$

32

روش تبدیل معکوس: توزیع های پیوسته با فرم پیچیده

- شکل CDF، تعدادی از توزیع های پیوسته احتمال از فرم ساده ای برخوردار نیست، از باب نمونه:

- Normal $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)dt$
- Gamma
- Beta

- روش تبدیل معکوس برای این دسته از توزیع ها کاربرد ندارد.
- راه حل: تقریب CDF
- مشکل: سرعت پایین محاسباتی

33

شیوه های جدولگرد برای تولید مقادیر نمایی و نرمال
table-lookup procedure

- در برخی از زبان های برنامه نویسی نظیر GPSS امکان محاسبه لگاریتم، سینوس، کسینوس یا ریشه دوم وجود ندارد.

در این صورت برای تولید مقادیر نمایی نمی توان از روش تبدیل معکوس استفاده نمود.

- در این موارد برای تولید اعداد تصادفی نمایی یا نرمال می توان مشابه با آنچه که در نمونه گیری از توزیع تجربی گفته شد، عمل نمود.

34

جدول مربوط به مقادیر نمایی با میانگین ۱

شیب a_i	خروجی x_i	ورودی r_i	شیب a_i	خروجی x_i	ورودی r_i
۱۱٫۰	۲٫۳۰	۰٫۹۰	۱٫۰۴	۰	۰
۱۴٫۵	۲٫۵۲	۰٫۹۲	۱٫۱۸	۰٫۱۰۴	۰٫۱
۱۸٫۰	۲٫۸۱	۰٫۹۴	۱٫۳۳	۰٫۲۲۲	۰٫۲
۲۱٫۰	۲٫۹۹	۰٫۹۵	۱٫۵۴	۰٫۳۵۵	۰٫۳
۳۰٫۰	۳٫۲۰	۰٫۹۶	۱٫۸۱	۰٫۵۰۹	۰٫۴
۴۰٫۰	۳٫۵۰	۰٫۹۷	۲٫۲۵	۰٫۶۹۰	۰٫۵
۷۰٫۰	۳٫۹۰	۰٫۹۸	۲٫۸۵	۰٫۹۱۵	۰٫۶
۱۴۰	۴٫۶۰	۰٫۹۹	۳٫۶۰	۱٫۲۰	۰٫۷
۳۰۰	۵٫۳۰	۰٫۹۹۵	۴٫۴۰	۱٫۳۸	۰٫۷۵
۸۰۰	۶٫۲۰	۰٫۹۹۸	۵٫۷۵	۱٫۶۰	۰٫۸۰
۳۳۳۳	۷٫۰	۰٫۹۹۹	۷٫۲۵	۱٫۸۳	۰٫۸۴
—	۸٫۰	۰٫۹۹۹۷	۹٫۰۰	۲٫۱۲	۰٫۸۸

35

جدول مربوط به مقادیر نرمال استاندارد

شیب a_i	خروجی x_i	ورودی r_i	شیب a_i	خروجی x_i	ورودی r_i
۲٫۶۳	۰٫۲	۰٫۵۷۹۲۶	۳۳,۳۳۳	−۵٫۰	۰
۲٫۸۴	۰٫۴	۰٫۶۵۵۴۲	۷۵۶	−۴٫۰	۰٫۰۰۰۰۳
۳٫۲۱	۰٫۶	۰٫۷۲۵۷۵	۲۰۶	−۳٫۰	۰٫۰۰۱۳۵
۳٫۷۶	۰٫۸	۰٫۷۸۸۱۴	۳۰٫۲	−۲٫۵	۰٫۰۰۶۲۱
۴٫۵۹	۱٫۰	۰٫۸۴۱۳۴	۱۱٫۳	−۲٫۰	۰٫۰۲۲۷۵
۶٫۲۲	۱٫۲	۰٫۸۸۴۹۳	۶٫۲۲	−۱٫۵	۰٫۰۶۶۸۱
۱۱٫۳	۱٫۵	۰٫۹۳۳۱۹	۴٫۵۹	−۱٫۲	۰٫۱۱۵۰۷
۳۰٫۲	۲٫۰	۰٫۹۷۷۲۵	۳٫۷۶	−۱٫۰	۰٫۱۵۸۶۶
۲۰۶	۲٫۵	۰٫۹۹۳۷۹	۳٫۲۱	−۰٫۸	۰٫۲۱۱۸۶
۷۵۶	۳٫۰	۰٫۹۹۸۶۵	۲٫۸۴	−۰٫۶	۰٫۲۷۴۲۵
۳۳,۳۳۳	۴٫۰	۰٫۹۹۹۹۷	۲٫۶۳	−۰٫۴	۰٫۳۴۴۵۸
—	۵٫۰	۱٫۰	۲٫۵۲	−۰٫۲	۰٫۴۲۰۷۴
			۲٫۵۲	۰	۰٫۵۰۰۰۰

36

تولید مقادیر تصادفی نمایی با میانگین β از روش جدولگرد

- برای تولید مقادیر نمایی بر اساس روش جدولگرد، ابتدا مقادیر تصادفی نمایی با میانگین ۱ را تولید کرده (X) و بر اساس رابطه زیر، مقادیر تصادفی نمایی با میانگین داده شده را بدست می آوریم.

$$Y = \beta X$$

37

مثال (تولید مقادیر تصادفی نمایی با میانگین ۴۰)

جدول مربوط به تولید متغیر تصادفی توزیع نمایی (میانگین =۱)

ورودی r_i	خروجی x_i	شیب a_i	ورودی r_i	خروجی x_i	شیب a_i
۰	۰	۱٫۰۴	۰٫۹۰	۲٫۳۰	۱۱٫۰
۰٫۱	۰٫۱۰۴	۱٫۱۸	۰٫۹۲	۲٫۵۲	۱۴٫۵
۰٫۲	۰٫۲۲۲	۱٫۳۳	۰٫۹۴	۲٫۸۱	۱۸٫۰
۰٫۳	۰٫۳۵۵	۱٫۵۴	۰٫۹۵	۲٫۹۹	۲۱٫۰
۰٫۴	۰٫۵۰۹	۱٫۸۱	۰٫۹۶	۳٫۲۰	۳۰٫۰
۰٫۵	۰٫۶۹۰	۲٫۲۵	۰٫۹۷	۳٫۵۰	۴۰٫۰
۰٫۶	۰٫۹۱۵	۲٫۸۵	۰٫۹۸	۳٫۹۰	۷۰٫۰
۰٫۷	۱٫۲۰	۳٫۶۰	۰٫۹۹	۴٫۶۰	۱۴۰
۰٫۷۵	۱٫۳۸	۴٫۴۰	۰٫۹۹۵	۵٫۳۰	۳۰۰
۰٫۸۰	۱٫۶۰	۵٫۷۵	۰٫۹۹۸	۶٫۲۰	۸۰۰
۰٫۸۴	۱٫۸۳	۷٫۲۵	۰٫۹۹۹	۷٫۰	۳۳۳۳
۰٫۸۸	۲٫۱۲	۹٫۰۰	۰٫۹۹۹۷	۸٫۰	–

$$R = 0.1636$$

$$\hat{F}(x_2) \le R = 0.1636 \le \hat{F}(x_3)$$

$$X_1 = x_2 + a_2(R - c_2)$$

$$X_1 = 0.104 + 1.18(0.1636 - 0.1) = 0.179$$

$$Y_1 = 40X_1 = 40 \times 0.179 = 7.16$$

38

مثال (تولید مقادیر تصادفی نمایی با میانگین ۴۰)

- مقدار دقیق با استفاده از روش تبدیل معکوس

$$Y_1 = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-R_1) = -40\ln(1-0.1636) = 7.15$$

i	R	Y (دقیق)	Y (تخمینی)	درصد خطا
۱	۰.۱۶۳۶	۷.۱۵	۷.۱۶	۰.۱۴
۲	۰.۹۰۴۰	۹۳.۷۴	۹۳.۷۶	۰.۰۲
۳	۰.۱۸۷۱	۸.۲۹	۸.۲۷	۰.۲۴
۴	۰.۷۸۲۴	۶۱.۰۰	۶۰.۹۰	۰.۱۶
۵	۰.۵۹۰۵	۳۵.۷۱	۳۵.۷۵	۰.۱۱
۶	۰.۰۵۰۰	۲.۰۵	۲.۰۸	۱.۳۸

بهتر است در صورت امکان از روش دقیق استفاده گردد

39

تولید مقادیر تصادفی نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ

جدول مربوط به تولید متغیر تصادفی نرمال استاندارد

ورودی r_i	خروجی x_i	شیب a_i	ورودی r_i	خروجی x_i	شیب a_i
۰	−۵٫۰	۳۳,۳۳۳	۰٫۵۷۹۲۶	۰٫۲	۲٫۶۳
۰٫۰۰۰۰۳	−۴٫۰	۷۵۶	۰٫۶۵۵۴۲	۰٫۴	۲٫۸۴
۰٫۰۰۱۳۵	−۳٫۰	۲۰۶	۰٫۷۲۵۷۵	۰٫۶	۳٫۲۱
۰٫۰۰۶۲۱	−۲٫۵	۳۰٫۲	۰٫۷۸۸۱۴	۰٫۸	۳٫۷۶
۰٫۰۲۲۷۵	−۲٫۰	۱۱٫۳	۰٫۸۴۱۳۴	۱٫۰	۴٫۵۹
۰٫۰۶۶۸۱	−۱٫۵	۶٫۲۲	۰٫۸۸۴۹۳	۱٫۲	۶٫۲۲
۰٫۱۱۵۰۷	−۱٫۲	۴٫۵۹	۰٫۹۳۳۱۹	۱٫۵	۱۱٫۳
۰٫۱۵۸۶۶	−۱٫۰	۳٫۷۶	۰٫۹۷۷۲۵	۲٫۰	۳۰٫۲
۰٫۲۱۱۸۶	−۰٫۸	۳٫۲۱	۰٫۹۹۳۷۹	۲٫۵	۲۰۶
۰٫۲۷۴۲۵	−۰٫۶	۲٫۸۴	۰٫۹۹۸۶۵	۳٫۰	۷۵۶
۰٫۳۴۴۵۸	−۰٫۴	۲٫۶۳	۰٫۹۹۹۹۷	۴٫۰	۳۳,۳۳۳
۰٫۴۲۰۷۴	−۰٫۲	۲٫۵۲	۱٫۰	۵٫۰	–
۰٫۵۰۰۰۰	۰	۲٫۵۲			

$$R = 0.4879$$

$$\hat{F}(x_{12}) \le R = 0.4836 \le \hat{F}(x_{13})$$

$$X_1 = x_{12} + a_{12}(R - c_{12})$$

$$X_1 = -0.2 + 2.52(0.4879 - 0.42074) = -0.031$$

$$Y_1 = (-0.031)\sigma + \mu$$

40

تولید مقادیر تصادفی نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ

- راه کار دوم: بهره گیری از روابط پیشنهاد شده در کتب مختلف

Table 8.4 Comparison of Approximate Inverse with Exact Values (To Four Decimal Places) for the Standard Normal Distribution

R	*Approximate Inverse*	*Exact Inverse*
0.01	−2.3263	−2.3373
0.10	−1.2816	−1.2813
0.25	−0.6745	−0.6713
0.50	0.0000	0.0000
0.75	0.6745	0.6713
0.90	1.2816	1.2813
0.99	2.3263	2.3373

$$X = F^{-1}(R) \approx \frac{R^{0.135} - (1-R)^{0.135}}{0.1975}$$

41

نمونه گیری از توزیع های گسسته

DISCRETE DISTRIBUTION

- All discrete distributions can be generated via inverse-transform technique
- Methods:
  - numerically: table-lookup procedure,
  - Algebraically: a formula
- Examples of application:
  - Empirical
  - Discrete uniform
  - Gamma

42

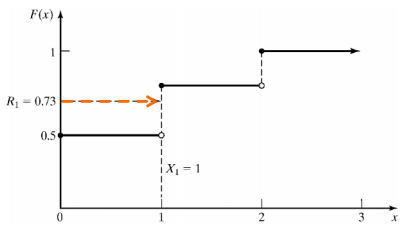
نمونه گیری از توزیع های گسسته: تجربی

- در پایان روز، تعداد محموله های موجود بر سکوی بارگیری در یک شرکت، ۰، ۱ یا ۲ با فراوانی (احتمال) به ترتیب، ۰.۵۰، ۰.۳۰ و ۰.۲۰ است. از مشاوران خواسته شده به منظور بهبود کارایی عملیات بارگیری مدلی طراحی نمایند که برای ایجاد مدل بایستی از تعداد محموله های پایان روز نمونه گیری شود.

$F(x)$	$P(x)$	X
۰.۵۰	۰.۵۰	۰
۰.۸۰	۰.۳۰	۱
۱.۰۰	۰.۲۰	۲

43

نمونه گیری از توزیع های گسسته: تجربی



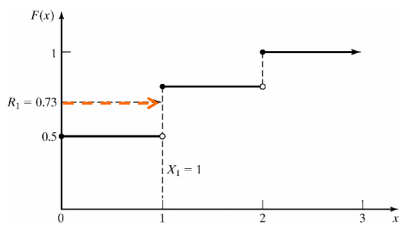
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.5 & 0\le x<1\\ 0.8 & 1\le x<2\\ 1.0 & x\ge 2\end{cases}$$

$$If \quad F(x_{i-1})<R\le F(x_i) \quad \rightarrow X=x_i$$

$$F(x_1)<R=0.73\le F(x_2) \quad \rightarrow X_1=x_2=1$$

44

نمونه گیری از توزیع های گسسته: تجربی



$$X = \begin{cases} 0 & R \le 0.5 \\ 1 & 0.5 < R \le 0.8 \\ 2 & 0.8 < R \le 1.0 \end{cases}$$

45

نمونه گیری از توزیع های گسسته: یکنواخت

$$P(x) = \frac{1}{k} \quad , x = 1,2,\ldots,k$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{k} & 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{k} & 2 \le x < 3 \\ \ldots & \\ \frac{k-1}{k} & k-1 \le x < k \\ 1 & k \le x \end{cases}$$

$$If \quad F(x_{i-1}) < R \le F(x_i) \quad \rightarrow X = x_i$$

$$F(x_{i-1}) = \frac{x-1}{k} < R \le F(x_i) = \frac{x}{k}$$

$$R = \frac{x}{k} \quad \rightarrow X = Rk$$

$$X = \lceil Rk \rceil$$

46

Let $\lceil y \rceil$ denote the smallest integer $\ge y$. For example, $\lceil 7.82 \rceil = 8$, $\lceil 5.13 \rceil = 6$, and $\lceil -1.32 \rceil = -1$

نمونه گیری از توزیع های گسسته: یکنواخت

$If\ \ k=10 \rightarrow$

$R=0.78 \qquad X=\lceil 0.78\times 10\rceil=\lceil 7.8\rceil=8$

$R=0.03 \qquad X=\lceil 0.03\times 10\rceil=\lceil 0.3\rceil=1$

$R=0.23 \qquad X=\lceil 0.23\times 10\rceil=\lceil 2.3\rceil=3$

$R=0.97 \qquad X=\lceil 0.97\times 10\rceil=\lceil 9.7\rceil=10$

47

نمونه گیری از توزیع های گسسته: یکنواخت

$$p(x)=\frac{2x}{k(k+1)},\quad x=1,2,\ldots,k$$

$$F(x)=\sum_{i=1}^{x}\frac{2i}{k(k+1)}=\frac{2}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{x}i \qquad F(x)=\frac{2}{k(k+1)}\times\frac{x(x+1)}{2}=\frac{x(x+1)}{k(k+1)}$$

$$F(x-1)=\frac{(x-1)x}{k(k+1)}<R\le\frac{x(x+1)}{k(k+1)}=F(x)$$

$$R=\frac{x(x+1)}{k(k+1)}\ \Rightarrow\ x^2+x-k(k+1)R=0$$

48

نمونه گیری از توزیع های گسسته: یکنواخت

$$x^2 + x - k(k+1)R = 0 \qquad \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 1 \times k(k+1)R}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \times k(k+1)R}}{2}$$

از آنجا که X مثبت است لذا یک ریشه آن قابل قبول است.

$$\Rightarrow x = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \times k(k+1)R}}{2} \right\rceil$$

49

نمونه گیری از توزیع های گسسته: یکنواخت

$$p(x) = p(1-p)^x \quad , x = 0, 1, 2, \ldots \qquad 0 < p < 1$$

$$F(x) = \sum_{j=0}^{x} p(1-p)^j$$

$$= \frac{p\{1-(1-p)^{x+1}\}}{1-(1-p)}$$

$$= 1-(1-p)^{x+1}$$

تمرین: نحوه تولید مقادیر تصادفی؟

50

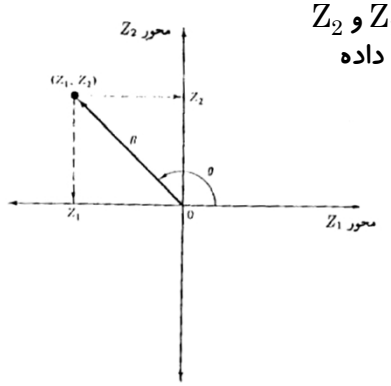
تبدیل مستقیم برای نمونه گیری از توزیع نرمال

- بدست آوردن تابع معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال، امکان پذیر نیست.
- بنابراین روش تبدیل معکوس برای نمونه گیری از توزیع نرمال کاربرد ندارد.
- در ادامه روشی برای نمونه گیری از توزیع نرمال استاندارد ارائه می گردد.

51

تبدیل مستقیم برای نمونه گیری از توزیع نرمال

دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z_1 و Z_2 را بصورتی که در شکل روبرو نشان داده شده ، در نظر بگیرید.



$$Z_1 = B\cos\theta$$

$$Z_2 = B\sin\theta$$

52

تبدیل مستقیم برای نمونه گیری از توزیع نرمال

- قضیه : اگر Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، آنگاه $(Z)^2$ دارای توزیع خی دو با یک درجه آزادی است.

$$If\ X_i \sim \chi^2_{\upsilon_i} \quad and \quad Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

$$Y \sim \chi^2_{\upsilon_1+\upsilon_2+...+\upsilon_n}$$

$$Z_1 = B\cos\theta \Rightarrow Z_1^2 = B^2\cos^2\theta$$

$$Z_2 = B\sin\theta \Rightarrow Z_2^2 = B^2\sin^2\theta$$

$$Z_1^2 + Z_2^2 = B^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta$$
$$= B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = B^2$$

53

تبدیل مستقیم برای نمونه گیری از توزیع نرمال

$$(Z_1^2 + Z_2^2) = B^2 \sim \chi^2_2$$

توزیع خی دو با ۲ درجه آزادی همان توزیع نمایی با میانگین ۲ است.

$$B^2 \sim \chi^2_2 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_2 \sim Expon(2)$$

از روش تبدیل معکوس برای نمونه گیری از توزیع نمایی با میانگین β داریم:

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(R) \quad \Rightarrow \quad B^2 = -\frac{1}{\lambda}\ln(R_i) \Rightarrow B = \sqrt{(-2\ln R)}$$

54

تبدیل مستقیم برای نمونه گیری از توزیع نرمال

از آنجا که زاویه θ ، بین ۰ و 2π به طور یکنواخت توزیع می شود، لذا داریم:

$$\theta = 2\pi R$$

$$Z_1 = B\cos\theta \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \sqrt{(-2\ln R_1)}\cos(2\pi R_2)$$

$$Z_2 = B\sin\theta \quad \Rightarrow \quad Z_2 = \sqrt{(-2\ln R_1)}\sin(2\pi R_2)$$

جهت تولید مقادیر توزیع $\text{normal}(\mu,\sigma^2)$

- Generate $Z_i \sim N(0,1)$

$$\boxed{X_i = \mu + \sigma Z_i}$$

55

تبدیل مستقیم برای نمونه گیری از توزیع نرمال

مثال: با استفاده از رویکرد بیان شده مقادیر تصادفی نرمال را با میانگین ۱۰ و واریانس ۴ تولید نمایید؟

$X \sim \text{normal}(10,4)$

$$R_1 = 0.1758 \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \sqrt{(-2\ln 0.1758)}\cos(2\pi 0.1489) = 1.11$$

$$R_2 = 0.1489 \quad \Rightarrow \quad Z_2 = \sqrt{(-2\ln 0.1758)}\sin(2\pi 0.1489) = 1.5$$

$$X_1 = 10 + 2(1.11) = 12.22$$
$$X_2 = 10 + 2(1.5) = 13.00$$

تولید ۱۰۰۰ مقدار تصادفی در Excel

56

روش پیچش CONVOLUTION METHOD

- توزیع احتمال جمع دو یا چند متغیر تصادفی مستقل را پیچش توزیع متغیرهای اصلی می نامند.
- به عبارت دیگر روش پیچش راهی است برای تعیین توزیع احتمالی یک متغیر تصادفی بر اساس مجموع چند متغیر تصادفی دیگر.
  - نمونه گیری از توزیع ارلنگ (حالت خاصی از توزیع گاما)
  - تولید مقادیر تقریباً نرمال

57

روش پیچش: (نمونه گیری از توزیع ارلنگ)

- متغیر تصادفی ارلنگ X با پارامترهای (α,λ)، جمع α متغیر تصادفی مستقل نمایی هر کدام با پارامتر λ می باشد.

$$X=\sum_{i=1}^{\alpha}X_i \qquad E(X)=\alpha/\lambda \qquad Var(X)=\alpha/\lambda^2$$

- برای تولید مقادیر تصادفی نمایی با پارامتر λ داریم:

$$X_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(R_i) \quad \rightarrow \quad X=\sum_{i=1}^{\alpha}-\frac{1}{\lambda}\ln(R_i)$$

$$X=-\frac{1}{\lambda}\ln(\prod_{i=1}^{\alpha}R_i)$$

از لحاظ کارایی بهتر است ابتدا تمامی مقادیر در هم ضرب شوند و سپس یکبار لگاریتم گرفته شود.

58

روش پیچش: نمونه گیری از توزیع ارلنگ-مثال

- کامیونها بصورت تصادفی به انبار وسیعی وارد می شوند. ورودها بر اساس توزیع پواسن با پارامتر ۱۰ کامیون در ساعت وارد می شوند.
- نگهبان درب ورود کامیونها را به تناوب به سکوهای شمالی و جنوبی میفرستند. فرد تحلیلگری برای بررسی فرایند بارگیری و تخلیه در سکوی جنوبی، مدلی ایجاد کرده که به زمان بین ورودها در سکوی جنوبی نیازمند است.

59

روش پیچش: نمونه گیری از توزیع ارلنگ- مثال

- از آنجا که ورودها بصورت پواسن است لذا فاصله زمانی بین ورودها به سکوهای شمالی و جنوبی دارای توزیع نمایی است.
- بنابراین فاصله بین دو ورود به سکوی جنوبی دارای توزیع گاما (ارلنگ) با پارامترهای زیر است:

$$\alpha = 2, \quad \lambda = 10 \qquad X = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{i=1}^{\alpha} R_i\right) \Rightarrow X = -\frac{1}{10}\ln\left(\prod_{i=1}^{2} R_i\right)$$

$$R_1 = 0.937, \quad R_2 = 0.217 \Rightarrow X = -0.1 \times \ln(0.937 \times 0.217) = 0.159 = 9.56'$$

Excel

60

روش پیچش (نمونه گیری از توزیع نرمال)

- قضیه حد مرکزی:

$$If\ \ E(X_i)=\mu_i\ \ \&\ \ Var(X_i)=\sigma_i^2 \quad \Rightarrow \quad Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu_i}{\sqrt{n\sigma_i^2}}\quad if\ \ n\to\infty$$

- اگر متغیر تصادفی Ri دارای توزیع یکنواخت در فاصله (۱ و ۰) باشد:

$$E(R_i)=0.5\ \ \&\ \ Var(R_i)=1/12$$

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}R_i-0.5n}{\sqrt{n/12}}$$

61

روش پیچش (نمونه گیری از توزیع نرمال)

- بسیاری از مراجع مقدار n=۱۲ را به عنوان تقریبی مناسب برای نرمال بودن رابطه قبل کافی می دانند پس:

$$Z=\frac{\sum_{i=1}^{n}R_i-0.5n}{\sqrt{n/12}}=\frac{\sum_{i=1}^{12}R_i-0.5(12)}{\sqrt{12/12}}=(\sum_{i=1}^{12}R_i)-6$$

- برای تولید یک مقدار تصادفی نرمال استاندارد به این روش، بایستی ۱۲ عدد تصادفی را با هم جمع و عدد ۶ را از آن کم کرد.
- برای تولید مقادیر تصادفی نرمال با میانگین و انحراف معیار خواسته شده به صورت زیر عمل می کنیم.

$$Y:\begin{cases}E(Y)=\mu_Y\\ Var(Y)=\sigma_Y^2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y=\mu_Y+\sigma_Y Z$$

62

روش پیچش (نمونه گیری از توزیع نرمال)

مدت های خدمت دهی در یک صندوق توزیع نرمال با میانگین ۷.۳ دقیقه و واریانس ۱۱.۷ دقیقه^{۲} دارد. یک مقدار تصادفی از این توزیع با استفاده از روش پیچش را بدست آورید.

$$R \rightarrow 0.1758,\ 0.1489,\ 0.2774,\ 0.6033,\ 0.9813,\ 0.1052$$
$$0.1816,\ 0.7484,\ 0.1699,\ 0.7350,\ 0.6430,\ 0.8803$$

$$Z = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6 \qquad Y = \mu_Y + \sigma_Y Z$$

$$Y = 7.3 + \sqrt{11.7}\left(\sum_{i=1}^{12} R_i - 6\right) = 6.10$$

Excel

63

تمرین:

- بر اساس روش پیچش، یک رویکرد جهت نمونه گیری از توزیع دوجمله ای ارائه نمایید.
- راهنمایی:
  - توزیع دوجمله ای با پارامترهای P و n ، حاصل جمع n توزیع برنولی با پارامتر P می باشد.
  - تابع احتمال توزیع برنولی به صورت زیر می باشد.

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & (1-p) \end{cases}$$

64

حل مسائل فصل هشتم کتاب
(ویرایش نخست و چهارم)

65